

## Induction | Chapitre 1 | Correction TD (I1)

### Exercice n°1 • Cartes de champ



Analyse des figures :

- Champ intense lorsque les lignes de champ sont proches.
- Le champ tourbillonne autour des sources.
- Le sens des tourbillons indique le sens de passage du courant (règle de la main droite).
- Champ uniforme lorsque les lignes de champ sont parallèles entre elles et régulièrement espacées.

### Exercice n°2 • Champ créé par une bobine longue



- 1) Orienter le champ à l'aide de la règle de la main droite.
- 2)  $\ell \gg R$ , on peut supposer l'hypothèse valable.
- 3) On note  $N$  le nombre de spire :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \Rightarrow N = \frac{B \ell}{\mu_0 I} = 796 \text{ spires}$$

### Exercice n°3 • Étude de distributions de courant



- 1) On se place en coordonnées cylindriques.

La distribution de courant est invariante par translation selon  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_\theta$ . On a donc :  $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$ .

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc le champ est orthogonal à ce plan. On a donc :  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$ .

- 2) On se place en coordonnées sphérique.

Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de courant. Seul le vecteur nul peut être orthogonal à ces deux plans.

Remarque : en réalité, tous les plans contenant la droite  $(OM)$  sont des plans de symétrie. La conclusion est la même.

- 3) On se place en coordonnées cartésiennes.

La distribution de courant est invariante par translation selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ . On a donc :  $\vec{B}(M) = \vec{B}(z)$ .

Le plan  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc le champ est orthogonal à ce plan. On a donc :  $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_y$ .

Le plan  $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant. Il s'agit donc d'un plan d'anti-symétrie du champ magnétique. On en déduit :  $B(z) = -B(-z)$ .

### Exercice n°4 • Moment magnétique atomique



- 1) Par définition du courant :

$$I = \frac{\delta q}{dt} = \frac{e}{T}$$

- 2) Par définition du moment magnétique dipolaire :

$$\mu = IS = \frac{e\pi R^2}{T}$$

- 3) Par définition du moment cinétique :

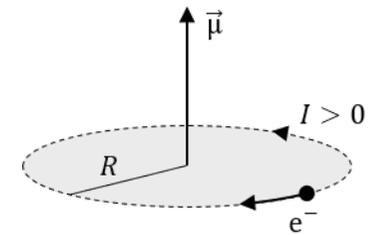
$$L_z = -R \cdot mR\omega = -mR \frac{2\pi}{T}$$

- 4) On en déduit :

$$\gamma = \mu/L_z = \frac{-e}{2m}$$

- 5) On pose :  $L_z = n\hbar$ . On en déduit :

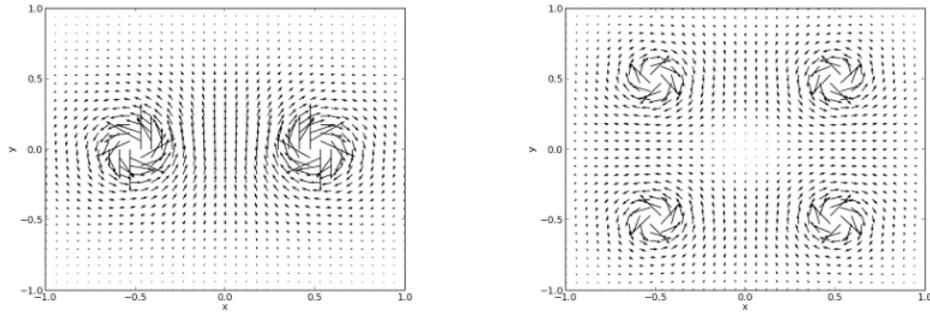
$$\mu = -n \frac{\hbar e}{2m} = -n\mu_B \quad \text{avec :} \quad \mu_B = \frac{\hbar e}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$



### Exercice n°5 • Piège de Ioffe-Pritchard



- 1) Avec un unique fil rectiligne infini, les lignes de champ sont des cercles, contenus dans des plans orthogonaux au fil et centrés sur le fil.
- 2) Avec deux barres, on somme les deux contributions. Les champs s'ajoutent en  $(0, 0)$ , comme représenté sur la figure de gauche.



3) Avec les quatre barres proposées, on obtient un champ magnétique nul sur l'axe du dispositif, comme représenté sur la figure de droite.

4) Le champ magnétique créé par les barres s'annule sur l'axe. La contribution restante est celle des spires, qui produisent un champ dirigé selon l'axe ( $Oz$ ).

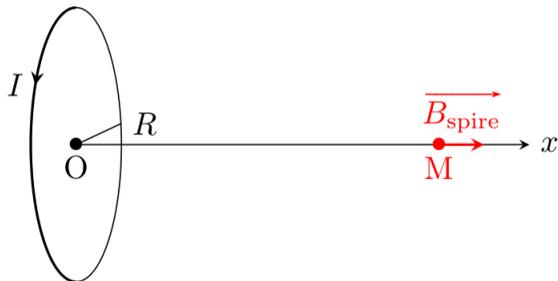
5) Avec les deux bobines circulaires, le champ magnétique devient non nul et selon ( $Oz$ ), sur l'axe du dispositif.

6) Avec les quatre barres seules, on produit un champ magnétique dont la norme s'annule sur l'axe et croît au voisinage de l'axe lorsqu'on s'en éloigne. Grâce aux deux bobines, on a, d'une part, un minimum non nul sur l'axe (composante du champ magnétique selon ( $Oz$ )) et, d'autre part, on produit un minimum de la norme du champ magnétique au centre du dispositif, dans le plan équidistant des deux bobines, pour qu'elles soient séparées d'une distance supérieure à celle de la configuration de Helmholtz. Dans le contexte du piégeage magnétique des atomes ultrafroids les quatre barres permettent un confinement radial et les deux bobines assurent le confinement axial.

### Exercice n°6 • Bobines de Helmholtz



1) Avec la règle de la main droite.



Ainsi,

$$\vec{B}_{spire}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \vec{u}_x$$

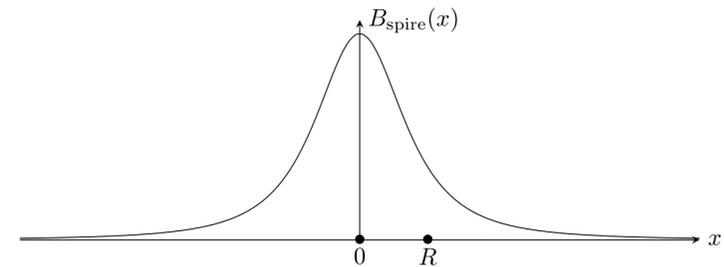
2) Par linéarité (théorème de superposition), on a :

$$\vec{B}_{bobines}(x) = N \cdot \left[ \vec{B}_{spire}(x - e/2) + \vec{B}_{spire}(x + e/2) \right]$$

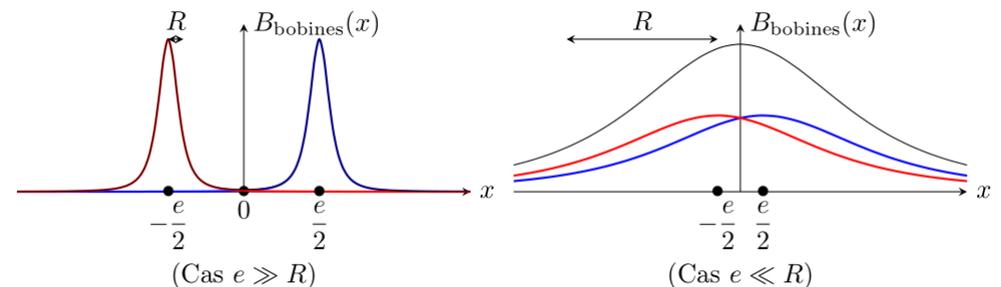
3) Ainsi,

$$B_{bobines}(x) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \left[ \left(1 + \left(\frac{x - e/2}{R}\right)^2\right)^{-3/2} + \left(1 + \left(\frac{x + e/2}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \right]$$

Pour une spire, la fonction est symétrique, centrée en zéro, maximale en  $x = 0$  et tend vers zéro en  $x = \pm\infty$  et la largeur de la courbe est de l'ordre de  $R$  :

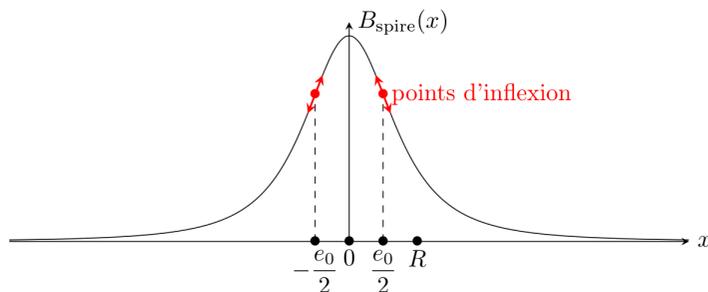


On distingue ainsi deux cas, suivant si les fonctions peuvent se superposer ou pas, ce qui correspond aux cas  $e \ll e_0$  (cas d'une superposition complète, c'est comme si on avait une seule bobine en  $x = 0$ ) ou  $e \gg e_0$  (pas de superposition – séparation totale des deux champs). On note que forcément alors  $e \sim R$ , c'est la seule échelle de longueur caractéristique du problème.



L'intérêt pratique du cas  $e \simeq e_0$  est d'avoir un cas intermédiaire utile : les deux champs se superposent et il y a de la place entre les deux bobines pour pouvoir y mettre des systèmes sensibles au champ magnétique. On démontre à la question suivante que le champ est relativement uniforme entre les deux bobines.

4) Pour une courbe  $B_{spire}(x)$ , il existe deux points d'inflexion répartis symétriquement autour de  $x = 0$

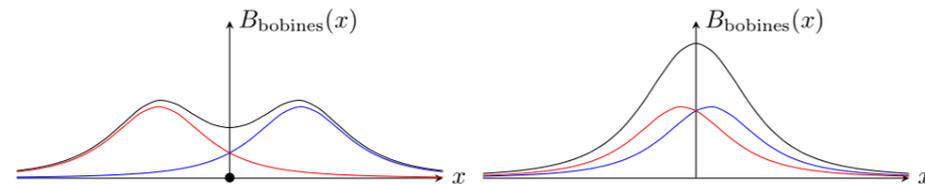


La courbe  $B_{bobines}(x)$  est paire, donc toutes ses dérivées impaires en  $x = 0$  sont nulles. En particulier, les dérivées d'ordre 1 et 3 sont nulles.

De plus, il existe deux cas limites :

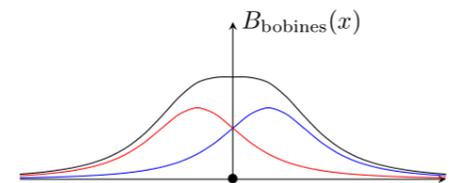
- existence d'un minimum de  $B_{bobines}(x)$  en  $x = 0$  (cas  $e > e_0$ ), donc une dérivée seconde positive ;
- et existence d'un maximum de  $B_{bobines}(x)$  en  $x = 0$  (cas  $e < e_0$ ), donc une dérivée seconde négative ;

On a forcément un cas, pour un certain  $e$  que l'on identifie à  $e_0$ , où la dérivée seconde de la fonction  $B_{bobines}(x)$  est nulle en  $x = 0$ .



Cas  $e > e_0$  minimum en  $x = 0$

Cas  $e < e_0$  maximum en  $x = 0$



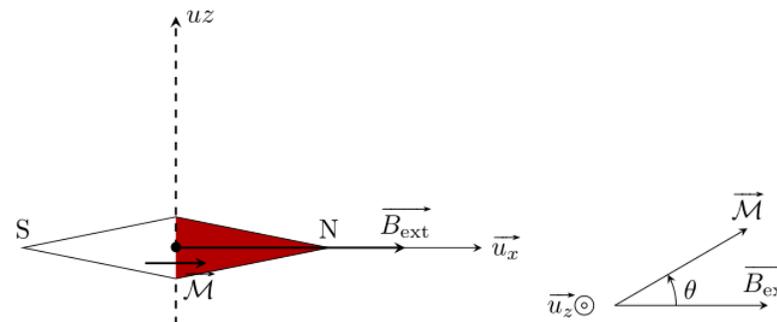
Cas  $e = e_0 (= R)$  inflexion en  $x = 0$

Ainsi, pour cette valeur de  $e = e_0$ , le développement de Taylor de la courbe en  $x = 0$  est nécessairement :

$$B_{bobines}(x) = B_0 + \mathcal{O}(x^4) \quad \text{avec : } B_0 = B_{bobines}(x = 0)$$

C'est-à-dire que la courbe est constante à l'ordre 3.

5) Schéma :



D'après le TMC à l'équilibre (dans le référentielle terrestre supposé galiléen, le couple de la liaison pivot est nul car pas de frottement, le moment du poids est nul) :

$$\vec{0} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext} = -MB_{ext} \sin(\theta) \vec{u}_z$$

Les positions d'équilibre sont donc  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ .

De plus, en posant  $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$  où  $\varepsilon \ll 1$  rad, le TMC donne :

$$\theta_{eq} = 0 \rightarrow J\ddot{\varepsilon} = -MB_{ext} \varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{MB_{ext}}{J} \varepsilon = 0$$

$$\theta_{eq} = \pi \rightarrow J\ddot{\varepsilon} = MB_{ext} \varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} - \frac{MB_{ext}}{J} \varepsilon = 0$$

Le cas  $\theta_{eq} = 0$  correspond à équilibre stable (ED d'oscillateur harmonique) et le cas  $\theta_{eq} = \pi$  correspond à équilibre instable (solutions de l'ED divergentes).

6) D'après la question précédente, les petites oscillations autour de la position d'équilibre stable se font avec une pulsation caractéristique :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{MB_{ext}}{J}} \Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB_{ext}}}$$

7) L'inversion du sens du courant change uniquement la valeur du champ magnétique extérieur ( $B_0$ ) appliqué à la boussole, mais pas le champ magnétique terrestre ( $B_H$ ).

Ainsi :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M(B_H + B_0)}} \quad \text{et} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M(B_H - B_0)}}$$

On en déduit donc :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_H - B_0}{B_H + B_0}} \Rightarrow B_H = \frac{1 + (T_1/T_2)^2}{1 - (T_1/T_2)^2} B_0$$

L'intérêt de cette expérience est d'une part d'avoir une mesure du champ  $B_H$  en le comparant à un champ  $B_0$  créé par l'expérimentateur et en ne mesurant que des temps : le résultat ne dépend pas de  $J$  et  $M$  plus difficiles à mesurer. D'autre part, la mesure du temps est assez précise, le contrôle de  $B_0$  aussi dans la configuration dite de Helmholtz  $e = R$  (où il est constant, où il y a de la place pour mesurer, et dont on connaît l'expression). De plus, dans cette expérience, l'alignement initial du dispositif avec le nord est assez facile à réaliser en coupant le courant dans les bobines ou en vérifiant que la position d'équilibre est bien dans l'axe des bobines.